公開金鑰密碼：能在網路上安全的傳送密碼，要感謝神奇的質數？ ——《用數學的語言看世界》

臉譜 臉譜出版 ・2018/01/14 ・6243字 ・閱讀時間約 13 分鐘

自然數，特別是質數的性質，與祕密通訊關聯很深刻。將通訊內容經過特定的規則轉換成其他記號稱為「加密」；而將加密過後的數據還原成原本可以讀的狀態則稱為「解密」。

曾經破解「加密規則」=破解「秘密通訊」

到 1970 年代為止，使用的密碼是只要知道加密規則，就可以利用解密回推成原本的數據。例如，西元前 1 世紀凱撒所使用的密碼，是將字母按照固定的順序位移，因此只要將字母的順序反方向逆推回去，就可以解密了。所以，如果加密的規則被敵軍知道的話，通訊祕密就全部洩漏了。不只是有加密的規則被偷的例子，也有光是靠傳送的訊息所出現的規則就破解密碼的例子。

1925 年左右，第二次世界大戰時，德軍使用的密碼機稱為「謎式密碼機」（又稱恩尼格瑪（Enigma）密碼機）。謎式密碼機是利用複雜的齒輪結構變換字母順序，而且每次使用時，字母變換的規則都不相同，被認為是不可能破解的密碼。

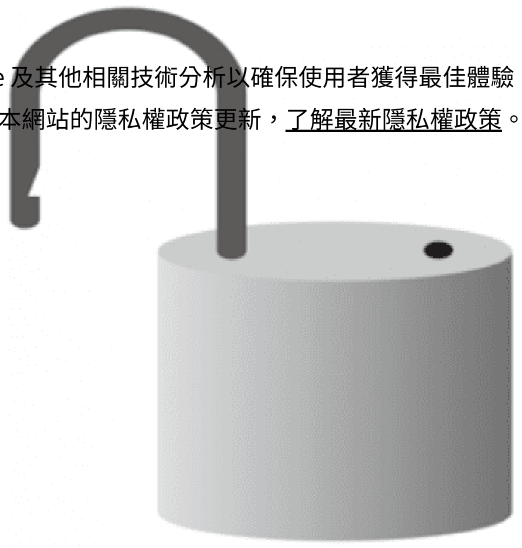
一台 T 型恩尼格瑪密碼機，由日軍使用，圖／by Greg Goebel@wikipedia commons。

不過，每天早上，為了讓機器在傳送加密過的變更初期設定的方法時不發生錯誤，謹慎的德國軍人都會發出兩次相同的訊息。波蘭軍情局的年輕數學家馬里安・雷耶夫斯基（Marian Rejewski）利用被稱為群論的數學理論，破解了這個會在每天早上最一開始先重複兩次的訊息，因此破解了密碼機的齒輪構造。

1939 年，當德軍對波蘭的侵略愈來愈近，波蘭軍情局長官覺悟到不可能保護祖國，於是召集了英國以及法國的情報軍官到華沙，告訴他們謎式密碼機的祕密。英國的政府密碼學校（GC&CS）根據這份情報，成功解讀德軍的通訊機密，對於同盟國的勝利有重大貢獻。

所有人都可以將資訊上鎖的「公開金鑰密碼

各位可能會覺得，只要加密規則被發現的話，就有可能依照同樣的規則破解密碼，這
的問題。但是，這個問題是可解決的。想到答案的是美國的惠特菲爾德・迪菲（Wh
曼（Martin Hellman）。 這是 1976 年左右的事情，為了說明他們的發想，先來說說



南京鎖，圖／《用數學的語言看世界》提供。

南京鎖是一種只要將上面的環壓入鎖的本體就會自動鎖住的鎖，不管是誰都可以簡單上鎖。不過，一旦南京鎖被鎖上了，只有持有鑰匙的人，或是有特殊開鎖技巧的人才能將鎖打開。雖然知道上鎖的方法，卻無法得知開鎖的方法。就南京鎖而言，上鎖的知識對於開鎖沒有任何幫助。

迪菲及赫爾曼他們想著，難道不能有像南京鎖這樣，即使知道加密規則也無法輕易解密的方法嗎？如果知道規則也無法解密的話，那加密的規則也就不需要保密，於是就能夠將加密的規則公開，不管是誰都可以將通訊內容加密了。就好像將南京鎖傳送到世界，不管是誰都可以幫忙傳送被南京鎖鎖住的信件。雖然南京鎖是公開的，但是只要將開鎖的鑰匙放在手邊不要被偷走的話，在通訊過程中沒有人可以打開鎖。

同樣地，雖然公開了加密的規則，只要解密的規則沒有公開的話，就可以守護通訊祕密了。這就是迪菲及赫爾曼的想法。實現了這個公開金鑰密碼概念的，就是現在網路交易時使用的 **RSA 密碼**。

現在網路交易時使用的 RSA 密碼，就是「公開金鑰密碼」。圖／JanBay@pixabay

從「費馬小定理」到「歐拉定理」

要說明 RSA 密碼之前，先介紹一下**歐拉定理**吧。這是費馬小定理一般化的定理。費馬小定理是指，如果 p 是質數，無論任何自然數 n，$n^p - n$ 一定能被 p 整除。再看一次第五節的表吧。

n 的值	1	2	3	4	5
n 除以 5 的餘數	1	2	3	4	0
n^4 除以 5 的餘數	1	1	1	1	0
n^5 除以 5 的餘數	1	2	3	4	0

第五節表，圖／《用數學看世界》提供。

根據這個表，將 n 除以 5 與將 n^5 除以 5 的餘數是相等的，這就是費馬小定理。難道
「n^4 除以 5 的餘數」那行，除了右邊之外，其餘的數字都是 1。右邊是 n 為 5 的倍數
5 的倍數時，n^4 除以 5 會餘 1。一般而言，當 p 是質數、n 不是 p 的倍數時，n^{p-1} 除

$$n^{p-1} = 1 + (\text{p 的倍數})$$

這可以從費馬小定理推導而來。雖然費馬小定理是指 $n^p - n$ 能 被 p 整除的關係式，但是因為：

$$n^p - n = n \times (n^{p-1} - 1)$$

如果，當 n 本身不是 p 的倍數，也就是說，n 無法被 p 整除，那 麼 $n^{p-1} - 1$ 應該能夠被 p 整除。因此

$$n^{p-1} = 1 + (\text{p 的倍數})$$

也有人 認為這個關係式才是**費馬小定理**。

18 世紀數學家歐拉，將這個費馬小定理擴大應用。費馬小定理是計算除以質數 p 的餘數；而歐拉定理則是計算將 n 被一般的自然數 m 除時的餘數。m 不是質數也沒有關係， 只要 n 跟 m 之間沒有 1 以外的公因數就可以。也就是說，n 跟 m 的 最大公因數是 1。這時候，n 跟 m 稱為「互質數」。

n 跟 m 的 最大公因數是 1，n 跟 m 稱為「互質數」，圖／by geralt@pixabay。

將與 m 互為質數，且小於 m 的自然數 n 的個數寫成 φ（m），當 p 跟 q 是不同質數的時候，就成為

$$\varphi(p) = p - 1$$

$$\varphi(p \times q) = (p - 1) \times (q - 1)$$

這個函數 φ（m），又稱為歐拉函數。歐拉定理認為，自然數 n 跟 m 相互為質數的時候，具有下面的關係式。

$$n^{\varphi(m)} = 1 + (\text{m 的倍數})$$

例如，當 $m = p$ 是質數的情況，因為 $\varphi(p) = p - 1$：

$$n^{p-1} = 1 + (\text{p 的倍數})$$

這就是費馬小定理。**歐拉定理在 m 是質數的情況下，就會成為費馬小定理。**

「公開金鑰密碼」的鑰匙──歐拉定理

公開金鑰密碼所使用的，是當 m 為兩個質數 p 與 q 的乘積，也就是 $m = p \times q$。在這個時候，因為 $\varphi(p \times q) = (p - 1) \times (q - 1)$，因此自然數 n 不被質數 p 及 q 整除的話，下面的關係式就能成立。

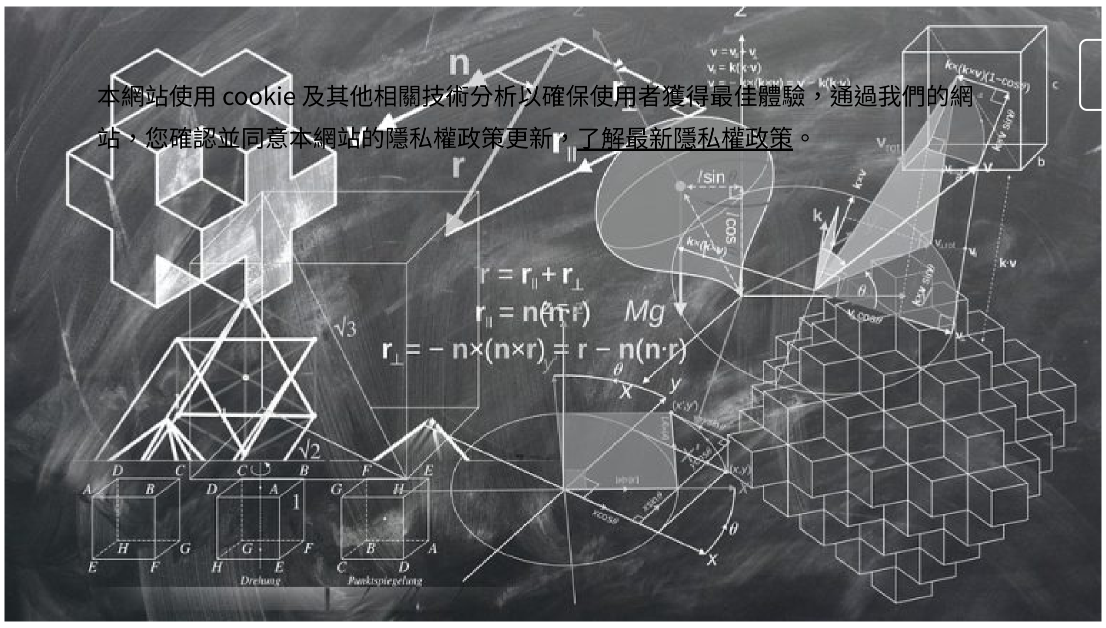
$$n^{(p-1) \times (q-1)} = 1 + (\text{p×q 的倍數})$$

例 如， 假 設 有 兩 個 質 數 $p = 3$、$q = 5$ 而 $m = p \times q = 15$，$\varphi(3 \times 5) = (3-1) \times (5-1) = 8$，n 與 15 互相為質數的話，則應該是

$$n^8 = 1 + (\text{15 的倍數})$$

請各位用 $n = 7$ 代入試試看。

使用歐拉定理的話，就可以發現數字的有趣性質。例如，歐拉定理可以證明 9、99、999 這些 9 排成的數，利用質因數分解的話，會出現除了 2 跟 5 之外的質數。



使用歐拉定理的話，就可以發現數字的有趣性質，圖／by geralt@pixabay。

下一節要使用歐拉定理說明加密原理，先做些準備工作吧。根據歐拉定理，如果自然數 n 無法被質數 p 及 q 整除，那麼就存在下列的關係式：

$$n^{(p-1)\times(q-1)} = 1 + \text{（p×q 的倍數）}$$

如果乘上 s 次方，因為 $1^s = 1$，就成為：

$$n^{s\times(p-1)\times(q-1)} = 1 + \text{（p×q 的倍數）}$$

再乘一次 n，就成為：

$$n^{1+s\times(p-1)\times(q-1)} = n + \text{（p×q 的倍數）}$$

也就是說，不管 n 是怎樣的數，只要 n 無法被質數 p 及 q 整除， $n^{1+s\times(p-1)\times(q-1)}$ 除以 p×q 的餘數，就會還原成 n。

那麼，就來應用在公開金鑰密碼上吧。

信用卡號碼的傳送與接收

加密技術在網路購物或是銀行的帳戶管理、甚至是身分證都經常被使用。將網路上的資訊加密之後送信、收信的過程稱為 SSL（Secure Socket Layer）。網頁的 http://www. …，就是遵從 SSL 通訊協定來收發訊息。

信用卡號碼加密遵從 RSA 密碼，圖／by stevepb@pixabay。

如果使用公開金鑰密碼的話，不管是誰都可以將信用卡之類的個 人隱私資訊加密之後，利用網路傳送。然而，知道該怎樣解讀的，只有知道解密規則的收信人。實現這件事的，就是由羅納德・李維斯特（Ron Rivest）、阿迪・薩莫爾（Adi Shamir）以及倫納德・阿德曼 （Leonard Adleman）三人的姓名開頭字

RSA 密碼，是依照下列順序進行的。

1. 密碼的接受者——假設是亞馬遜購物網站好了——為了製作公開金鑰，先選擇兩
   q。

2. 亞馬遜網站也選擇了與 $(p-1)\times(q-1)$「互為質數」的自然數 k。舉例來說，當 $p=3$、$q=5$ 的話，因為 $(p-1)\times(q-1)=8$，所以假設選了 $k=3$ 為 8 的互質數。

3. 亞馬遜計算 $m=p\times q$，並且告訴你 m 以及 k。這就是公開金鑰。然而，卻不跟你說 m 的質因數 p 及 q 是什麼數字。所以你只知道兩個質數的乘積。以現在的例子的話，$m=p\times q=15$。因為這數字實在太小了，馬上就能知道 15 的質因數是 3 跟 5。實 際上使用的 RSA 密碼大概是 300 位位數的數字，不可能進行質因數分解。
4. 你將信用卡密碼之類想要傳送的資訊轉換成自然數 n。要注意一點，n 要小於 m，並且 n 及 m 為互質數（因為 m 是將近 300 位位數的天文數字，所以不會太難找到 n）。
5. 你使用從亞馬遜來的情報（m,k），將 n 加密。加密的規則是： 計算 n^k，接著除以 m，計算除以 m 之後的餘數。將餘數寫成 α。 也就是： $n^k=\alpha+$（m 的倍數）你將這個 α 做為密碼，利用網路傳送給亞馬遜。例如，$n=7$ 的話，就計算 $7^3=343=13+15\times22$，所以 $\alpha=13$。
6. 亞馬遜收到密碼 α 之後，開始將 n 解密。

第（6）項就是 RSA 密碼的重點。亞馬遜應該要解決的問題是 **「有一個不知道是什麼的數 n，當 n^k 除以 m 而餘數是 α 時，n 是多 少呢？」**

如果沒有「除以 m，而求餘數」這一個步驟的話，問題就會變得比較簡單。如果只是 $n^k=\alpha$ 的話，那麼只要計算 α 的 k 次方根就好。

RSA的作者之一：阿迪・薩莫爾（Adi Shamir），圖／by Ira Abramov from Even Yehuda, Israel@wikipedia commons。

一般計算 k 次方根時，可以逐漸逼近正確答案。例如，當 $n^3=343$ 時，想知道 n 的時候，首先，先任意的推測一下，假設 $n=5$，$5^3=125$ 似乎有點太小了。那麼，稍微增加一點，$n=9$ 試試看，這 次 $9^3=729$ 又太大了。當 n 增加，n^3 也增加；當 n 減少，n^3 也減少， $n=5$ 太小而 $n=9$ 太大，所以正確值一定就在 5 跟 9 之間。反覆計算幾次之後，就可以得到 $n=7$ 的正確答案。

但是，當加入「除以 15，計算餘數」這個步驟之後，問題突然 變得難上加難。除以 15 而有餘數代表著，當餘數從 1、2、3 直到 15 時，也就是 0，之後又會再從 1、2、3 開始。即使 n 增加了，不代表n^3 除以 15 的餘數會增加。實際上，與 15 互為質數的 n 有 n ＝ 1、2、4、 7、8、11、13、14，計算 n^3 之後除以 15 的餘數是 1、8、4、13、2、11、7、14，這些餘數的排列方法，似乎沒有簡單的規律性。因此，即使知道「n^3 除以 15 的餘數」，要計算 n 的值也很困難。像 15 這樣小的數字，還可以從頭到尾算過一次，如果是 300 位數的
了。

但是呢，亞馬遜卻可以很輕鬆地解決這個問題。因為他們知道 m 是 p 及 q 的乘積這
以決定「魔法數字」 γ。這就是解開密碼的鑰匙。對於不知道是什麼數的 n，只要知

$$n^k=\alpha+（m 的倍數）$$

利用魔法數字 γ，就可以知道：

$$\alpha^{\gamma} = n + (m \text{ 的倍數})$$

也就是說，從密碼 α 可以推算回原本的數 n。

舉例來說，當公開金鑰 m = 15、k = 3 的時候，因為 $7^3 = 13 +$（15 的倍數），將 7 密碼化的話，就變成 α = 13。於是，你把這個 數字傳送給亞馬遜。這個時候，魔法數字就是 γ = 3。

亞馬遜知道這個數字。因此，他收到密碼 13 之後，計算 $13^3 = 7 +$（15 的倍數）。將密碼 13 做 3 次方運算之後，除以 15 的餘數為 7，於是，加密之前 的資訊 n = 7 就被復原了。 亞馬遜要怎樣找到魔法數字 γ 呢。本來 α 是由：

$$n^k = \alpha + (m \text{ 的倍數})$$

計算而得知的數，魔法數字成為 γ 這件事情就表示：

$$\alpha^{\gamma} = n + (m \text{ 的倍數})$$

也就是說：

$$(n^k)^{\gamma} = n^{\gamma \times k} = n + (m \text{ 的倍數})$$

這時候，回想一下歐拉定理吧。如果 n 不能被 p 或 q 整除，那麼就符合下列方程式。

$$n^{1 + s \times (p-1) \times (q-1)} = n + (m = p \times q \text{ 的倍數})$$

這兩個式子看起來很像呢。不管哪一個都是計算 n 的次方之後， 就能恢復 n 的式子。所以，如果選擇一個適當的 γ，讓 $\gamma \times k = 1 + s \times (p - 1) \times (q - 1)$ 的話，就可以解開密碼了。

這時候的重點是，k 及 $(p - 1) \times (q - 1)$ 要「互為質數」。這時候， 一定存在自然數 γ 及 s，使得：

$$\gamma \times k = 1 + s \times (p - 1) \times (q - 1)$$

例如剛剛的例子，k = 3，$(p - 1) \times (q - 1) = 8$，與這兩個數互為 質數，因此假設 γ = 3，s = 1：

$$3 \times 3 = 1 + 1 \times 8$$

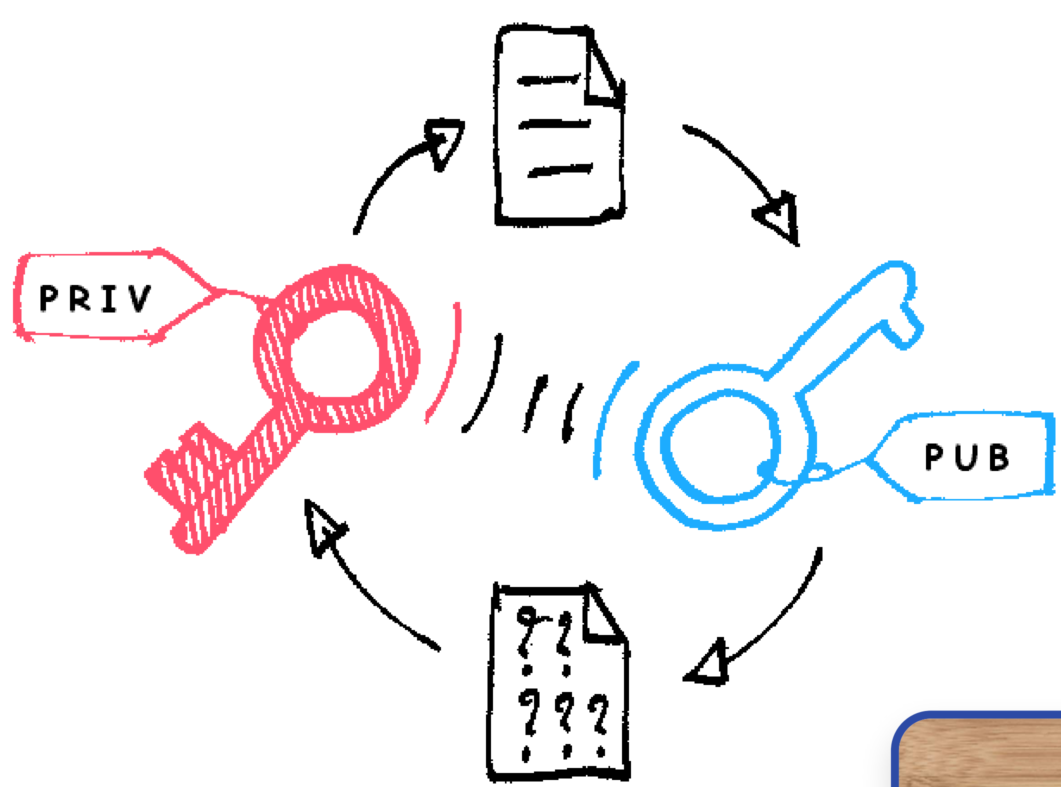
密碼 α 是由下面的方程式決定的：

$$n^k = \alpha + (m \text{ 的倍數})$$

如果像這樣使用 γ 的話，就能夠利用

$$\alpha^k = n^{k \times \gamma} + (m \text{ 的倍數}) = n^{1 + s \times (p-1) \times (q-1)} + (m \text{ 的倍數}) = n + (m \text{ 的倍數})$$

於是，從密碼 α 就可以解密恢復原本的 n 了。而這個 γ，就是亞馬遜的魔法數字。



此流程圖顯示非對稱加密過程是單向的，其中一條密鑰加密後只
的另一條密鑰解密，圖／by Nicobon@wikipedia comm

近乎不可能的天文數字「質因數分解」讓密

只要無法計算天文數字的質因數分解，RSA 密碼系統就不可能被破解。即使利用現在廣為人知的演算法，計算 N 位數自然數的質因數 分解所花費的時間仍然與 N 呈指數函數的關係。例如，2009 年，有一個團隊完成了 232 位數的質因數分解，但是據說他們利用了數百台平行電腦，花了兩年時間才完成計算。

如果，發現了完成質因數分解只需要 N 位數的 N 次方時間的演算法的話，使用 RSA 密碼做為公開金鑰的系統都會被破解，應該會造成網路經濟大混亂吧。

實際上，雖然還沒有實現，但是已經知道如果能做出使用量子力學的「量子電腦」的話，N 位數自然數的質因數分解，應該只需要 N 次方時間就能完成。1994 年，麻省理工學院的數學家彼得・秀爾 （Peter Shor）發現了一種計算質因數分解的演算法，只需要 N 位數自然數的 N^3 計算次數就能完成。只是，「量子電腦」目前仍然處於理論的階段，實際上依然無法做到。

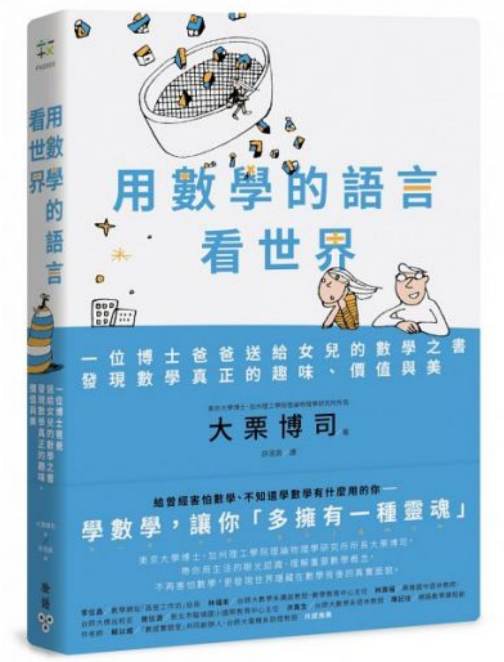
另一方面，如果利用量子力學的原理，也有可能做出跟 RSA 相異的通訊密碼。「量子密碼」的方法是，如果密碼被中途攔截並且解密的話，不論藏得多隱密，都一定會被發現。只要量子力學是正確的， 就不可能竊取通訊訊息。不管是「量子電腦」或「量子密碼」被開發出來，應該都會對通訊安全造成很大的改變。

這些定理在現代的網路經濟中扮演非常重要的角色，圖／by TBIT@pixabay。

這一話所提到的許多證明及定理，證明了質數有無限多個，也證明 了質因數的分解法只有一種，還有費馬小定理以及歐拉定理，這些都是著迷於自然數以及質數性質的數學家們，因好奇而發現的。而這些定理卻在現代的網路經濟中扮演非常重要的角色，這真是令人感觸良多。

在 1995 年，證明出將近四個世紀都沒有解開的費馬最後定理； 而在 2013 年，對於孿生質數的證明有很大進展。另外，應用歐拉定理而產生的 RSA 密碼是在 1977 年發明的，而有效判定質數的方法是 2002 年發明的。雖然對自然數的研究已長達數千年，然而，對於自然數性質的理解以及應用開發，直到現在仍持續發展中，而且尚未解決的謎題依然很多。

19 世紀美國的哲學家詩人亨利・大衛・梭羅（Henry David Thoreau）曾經寫過：「雖然數學被喻為詩一般的存在，但是其中的大多數都尚未被歌詠。」對於質數，應該從現在開始會有許多的詩歌詠頌吧。然後，就會像根據歐拉定理所產生的 RSA 密碼在網路經濟上的運用一般，質數的新發現也可能對未來的生活產生重大的變革。



本文摘自《用數學的語言看世界：一位博士爸爸送給女兒的數學之書，發現數學真正的趣味、價值與美》，臉譜出版。


自造世代
創新未來
Maker Can Help


喜歡這篇文章嗎？
追蹤 下列標籤
有新文章直接通知你！


歡慶
DAY